INTRODUCCIÓN

El Cálculo, es la rama de las matemáticas que se ocupa del estudio de los incrementos en las variables, pendientes de curvas, valores máximos y mínimos de funciones y de la determinación de longitudes, áreas y volúmenes. Su uso es muy extenso, sobre todo en ciencias e ingeniería, siempre que haya cantidades que varíen de forma continua.

Las ecuaciones diferenciales son muy interesantes en cuanto a la posibilidad que presentan para indagar sobre variedad de problemas de las ciencias físicas, biológicas y sociales. A partir de la formulación matemática de situaciones físicas, biológicas o sociales se describen procesos reales aproximados. Dentro de los diversos campos de acción de la ingeniería industrial, una de las múltiples aplicaciones de ecuaciones diferenciales está relacionada con matemáticas financieras.

La derivada se utilizó, en principio, para el cálculo de la tangente en un punto, y pronto se vio que también servía para el cálculo de velocidades, y en consecuencia para el estudio de la variación de una función. Desde los primeros pasos en el cálculo diferencial, de todos es conocido que dada una función y = f(x), su derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, en forma de diferencial de una función de una sola variable, es también una función que se puede encontrar mediante ciertas reglas como el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, que nos muestra la vinculación entre la derivada de una función y la integral de dicha función.

Hay una gran variedad de problemas en los cuales se desea conocer un elemento variable a partir de su coeficiente de variación, o dicho de otra forma, queremos conocer cómo varía dicho elemento en función de una o varias variables.

En definitiva, lo que se pretende es determinar una función desconocida mediante datos relacionados por una ecuación que contiene, por lo menos, una de las derivadas de la función desconocida.

UNIDAD I

LÍMITE Y CONTINUIDAD

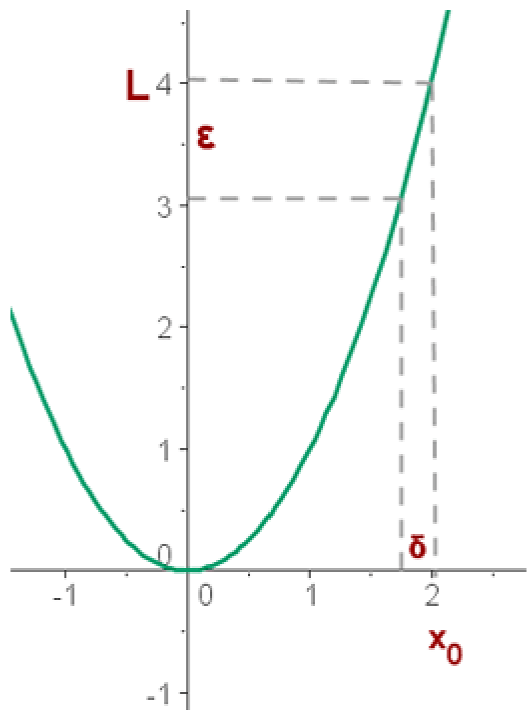
DEFINICIÓN DE LÍMITES

Un límite es: “*cuando me acerco a un valor de x a cuanto se acerca la función*”

LIMITE Y CONTINUIDAD

El vocablo que nos ocupa en primer lugar, es la palabra “***límite***”, podemos decir que se trata de una palabra que procede, etimológicamente hablando, del latín. En concreto, emana del sustantivo “limes”, que puede traducirse como “frontera o borde”.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$



La noción de **límite** tiene múltiples acepciones. Puede tratarse de una **línea** que separa dos territorios, de un extremo a que llega un determinado tiempo o de una restricción o limitación.

Para las matemáticas, un límite es una magnitud fija a la que se aproximan cada vez más los términos de una secuencia infinita de magnitudes.

Por su parte, la palabra “***Función***” también coincide con el término anterior en lo que respecta a su origen. Y es que, de igual modo, viene del latín, más exactamente de “*functio*”, que es sinónimo de “función o ejecución”.

Función, por otra parte, es un concepto que refiere a diversas cuestiones. En este caso, nos interesa la definición de función matemática (la relación **f** de los elementos de un conjunto **A** con los elementos de un conjunto **B**).

La expresión **límite de una función** se utiliza en el cálculo diferencial matemático y refiere a la cercanía entre un **valor** y un **punto**. Por ejemplo: si una función **f** tiene un límite **X** en un punto **t**, quiere decir que el valor de **f** puede ser todo lo cercano a **X** que se desee, con puntos suficientemente cercanos a **t**, pero distintos.

Dentro de lo que sería el límite de la función, tendríamos que destacar la existencia de una teoría muy importante que hiciera el matemático Eudoxo de Cnido, que era discípulo del filósofo Platón.

No obstante, se considera que el verdadero formulador de aquella no es otro que el matemático y astrónomo alemán Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), que ha pasado a la Historia por el calificativo de "príncipe de las Matemáticas".

Ese teorema tenemos que decir que lo que viene a establecer es que "***si dos funciones se decantan por el mismo límite en lo que se refiere a un punto concreto, cualquier otra función que se establezca entre ambas también compartirá con ellas el mismo límite".***

Dentro del ámbito del análisis matemático y del cálculo, y más exactamente en el área de las demostraciones, es donde se suele recurrir al uso de la teoría del Gauss, que también es llamada teorema del ladrón y los dos policías.

En definitiva, una función **f** con límite **X** en **t** quiere decir que dicha función tiende hacia su límite **X** cerca de **t**, con **f(x)** tan cerca de **X** como sea posible pero haciendo que **x** sea distinto de **t**. De todas maneras, la idea de cercanía es poco precisa, por lo que una definición formal requiere de más elementos.

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Dadas dos funciones f(x) y g(x) que tienen límite en un punto a, se cumplen las siguientes propiedades:

- Prop. 1.- El límite de la suma de ambas funciones es igual a la suma de los límites.
- Prop. 1-A.- El límite de la diferencia se calcula como la diferencia de los límites.

- Prop. 2.- El límite del producto de las funciones es igual al producto de sus límites.
- Prop. 3.-El límite del cociente entre ambas funciones es igual al cociente entre los límites, siempre y cuando el límite del denominador sea distinto de cero.
- Prop. 4.- El límite del producto de una constante por una función viene determinado por la multiplicación de la constante por el límite de la función.

Estas propiedades se expresan matemáticamente como sigue:

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)/\lim_{x\to a} g(x), \text{ siempre que } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x\to a}[k \cdot f(x)] = k \lim_{x\to a} f(x)$$

Ejemplos:

1.- Demostrar que $\lim_{x\to 2} (x^2+4x)=12$

Demostración:

Puesto que tenemos una suma utilizaremos la propiedad número uno.

La función dada es la suma de x^2 y 4x. en primer lugar hallaremos los límites de estas dos funciones

$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$, puesto que $x^2 = x \cdot x$

ahora:

$\lim_{x\to 2} 4x = 4 \lim x = 8$

Luego el límite buscado es 4+8=12

2.- demostrar que $\lim_{x\to 2} \frac{z^2-9}{z+2} = -\frac{5}{4}$

Demostración:

Considerando el numerador, $\lim_{x\to 2} (z^2-9)=-5$ y en cuanto al denominador $\lim_{x\to 2} (z+2)=4$

Luego por el teorema 3 tenemos el resultado buscado.

<u>FUNCIONES CONTINUAS</u>

En el ejemplo 1 donde se demostró que $\lim_{x\to 2} (x^2+4x)=12$, observamos que la solución es el valor de la función para x=2; es decir el valor límite de la función cuando x tiende a 2 es igual al valor de la función para x=2. En este caso decimos que la función es continua para x=2. La definición general es la siguiente:

se dice que una función f(x) es continua para x=a, si el límite de la función, cuando x tiende a "a", es igual al valor de la función para x=a. **En símbolos, si**

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Entonces f(x) es continua para x=a

Se dice que una función es discontinua para x=a si no satisface esta condición

UNIDAD II

LA DERIVADA

DEFINICIÓN DE DERIVADA

La derivada en un punto, está asociada a la pendiente de la recta tangente al gráfico de una función, en el punto que le corresponde a la imagen de determinado valor de “x”.

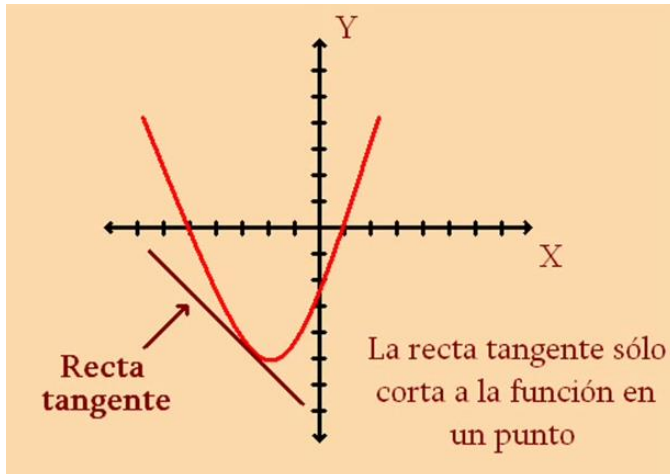


Fig.1 Representación de una derivada

En matemáticas, la derivada de una función es una medida de la rapidez con la que cambia el valor de dicha función matemática, según cambie el valor de su variable independiente. La derivada de una función es un concepto local, es decir, se calcula como el límite de la rapidez de cambio media de la función en un cierto intervalo, cuando el intervalo considerado para la variable independiente se torna cada vez más pequeño. Por ello se habla del valor de la derivada de una cierta función *en un punto dado*.

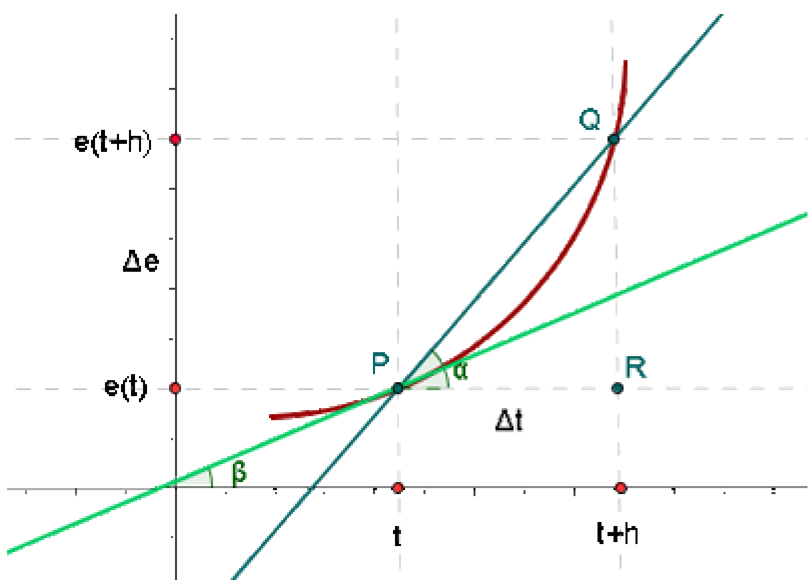
La derivada es un concepto que tiene variadas aplicaciones. Se aplica en aquellos casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una magnitud o situación. Es una herramienta de cálculo fundamental en los estudios de Física, Química y Biología, o en ciencias sociales como la Economía y la Sociología. Por ejemplo, cuando se refiere a la gráfica de dos dimensiones de f, se considera la derivada como la pendiente de la recta tangente del gráfico en el punto x. Se puede aproximar la pendiente de esta tangente como el límite cuando la distancia entre los dos puntos que determinan una recta secante tiende a cero, es decir, se transforma la recta secante en una recta tangente. Con esta interpretación, pueden determinarse muchas propiedades geométricas de los gráficos de funciones, tales como concavidad o convexidad.

Algunas funciones no tienen derivada en todos o en alguno de sus puntos. Por ejemplo, una función no tiene derivada en los puntos en que se tiene una tangente vertical, una discontinuidad o un punto anguloso. Afortunadamente, gran cantidad de las funciones que se consideran en las aplicaciones son continuas y su gráfica es una curva suave, por lo que es susceptible de derivación.

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA DERIVADA

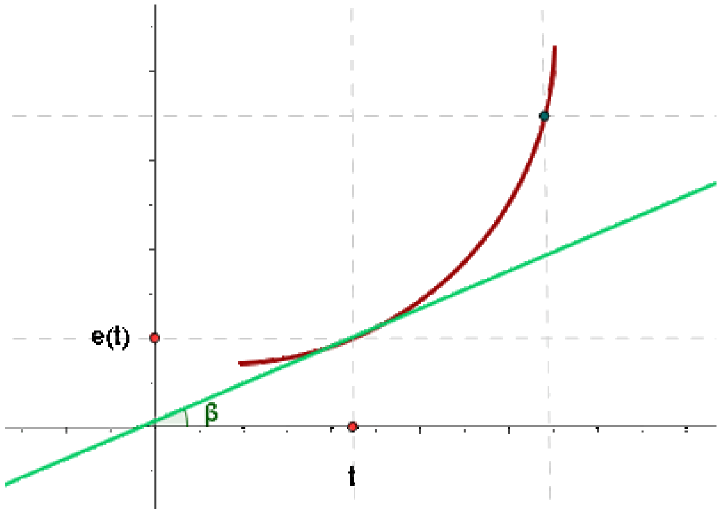
La velocidad media es el cociente entre el espacio recorrido (Δe) y el tiempo transcurrido (Δt).

$$v_m(t) = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$



Velocidad instantánea

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$



Ejemplo

La relación entre la distancia recorrida en metros por un móvil y el tiempo en segundos es $d(t) = 6t^2$. Calcular:

1. la velocidad media entre t = 1 y t = 4.

La velocidad media es el cociente incremental en el intervalo [1, 4].

$$v_m = \frac{e(4) - e(1)}{4 - 1} = \frac{6 \cdot 4^2 - 6 \cdot 1^2}{3} = \frac{96 - 6}{3} = 30 \text{ m/s}$$

2. La velocidad instantánea en t = 1.

La velocidad instantánea es la derivada en t = 1.

$$v_i = e'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{6(t+h)^2 - 6t^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6\left(t^2 + 2ht + h^2\right) - 6t^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6t^2 + 12ht + 6h^2 - 6t^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{12ht + 6h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(12t + 6h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (12t + 6h) = 12 \text{ m/s}$$

Conceptos De Incremento Y De Razón De Cambio La Derivada De Una Función

La ***derivada*** de una ***función***. Se llama ***incremento*** al ***cambio*** de valor de una variable desde un valor inicial hasta un valor final. Para calcular este ***incremento*** basta con hallar la diferencia entre el valor final y el inicial.

INCREMENTOS:

Cuando una cantidad variable pasa de un valor inicial a otro valor, se dice que ha tenido un incremento. Para calcular este incremento basta con hallar la diferencia entre el valor final y el inicial. Para denotar esta diferencia se utiliza el símbolo Δx, que se lee "delta x". El incremento puede ser positivo o negativo, dependiendo de si la variable aumenta o disminuye al pasar de un valor a otro. Por ejemplo, si el valor inicial de una variable x, x1, es igual a 3, y el valor final x2 es igual a7, el incremento $\Delta x = x2 - x1 = 7 - 3 = 4$: la variable se ha incrementado positivamente en 4 unidades. En cambio, si el valor inicial es 7 y el valor final 3, $\Delta x = x2 - x1 = 3 - 7 = -4$: la variable hatenido un incremento negativo (decremento) de 4 unidades.

RAZON DE CAMBIO

Comenzando por la razón instantánea de cambio de una función cuya variable independiente es el tiempo **t**. Suponiendo que **Q** es una cantidad que varía con respecto del tiempo **t**, escribiendo **Q= f(t)**, siendo el valor de **Q** en el instante **t.** Por ejemplo:

- ⇒ El tamaño de una población (peces, ratas, personas, bacterias,…)
- ⇒ La cantidad de dinero en una cuenta en un banco
- ⇒ El volumen de un globo mientras se infla
- ⇒ La distancia **t** recorrida en un viaje después del comienzo de un viaje

El cambio en **Q** desde el tiempo **t** hasta el tiempo **t+Δt**, es el incremento.

La Razón de Cambio Promedio de **Q** (por la unidad de tiempo) es, por definición, la razón de cambio Δ**Q** en **Q** con respecto del cambio Δ**t** en **t**, por lo que es el cociente Definimos la razón de cambio instantánea de **Q** (por unidad de tiempo) como el límite de esta razón promedio cuando **Δt→0**. Es decir, la razón de cambio instantánea de **Q** es lo cual simplemente es la derivada **f´(t)**. Así vemos que la razón de cambio instantánea de **Q=f(t)** es la derivada

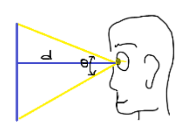
Derivada interna:

A partir de la regla de la cadena era posible encontrar una fórmula que nos permitiese derivar una función a la n. Es decir que tenemos una función $y = \left(f(x)\right)^n$ entonces dicha derivada es igual a $y´ = nf(x)^n(n-1).f´(x)$. La derivada de f(x) la llamamos de ahora en adelante como la derivada interna. Podemos decir entonces que la derivada y’ es n que multiplica a $f(x)^{n-1}$ por su derivada interna.

- **Regla 7.** Regla de la cadena: si *f* y *g* son funciones diferenciables de *x* donde $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces $y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ es una función diferenciable de *x*, *y*:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial (f \circ g)}{\partial x} = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Comúnmente, *g'(x)* se conoce como **derivada interna.**



- **Regla 8.** Regla de la potencia: Si *u* es una función diferenciable de *x* y *n* es un numero real, entonces $y = u^n$ es una función diferenciable de x, y:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial (u^n)}{\partial x} = nu^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x}$$

Comúnmente, $\partial u/\partial x$ se conoce como **derivada interna.**

- **Ejemplo:** Sea $y=(2x+1)^3$ determinar y'

Regla 7 $\quad \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x}=f'(u)\cdot g'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Regla 8 $\quad \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial(u^n)}{\partial x}=nu^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x}$

Solución:

Sea $u=(2x+1)$

$f(u)=u^3$

$f'(u)=3u^2$

$f'(u)=3(2x+1)^2$

$g(x)=2x+1$

$g'(x)=2$

$y'=f'(u)\cdot g'(x)$

$y'=\left[3(2x+1)^2\right]\cdot 2$

$\boxed{y'=6(2x+1)^2}$

Considerando los elementos hasta ahora expuestos podemos aplicar las **razones de cambio** a ciertos problemas reales, para ello es importante tener en cuenta lo siguiente:

1. Teniendo el planteamiento del problema primeramente reconocemos los datos a utilizar como son, sus magnitudes.
2. Encontrar una expresión matemática que relacione a la o a las variables especificadas en el problema, por ejemplo si tenemos como variable el volumen, buscamos su expresión matemática, esto es **V=a^3**
3. Pasar la ecuación estática a una ecuación dinámica en ambos miembros de la ecuación estática. Ejemplo de la ecuación **V=a^3** pasamos esta ecuación a una ecuación dinámica, quedando:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{da^3}{dt}$$

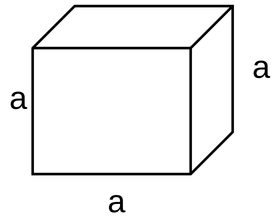
4. Realizamos la derivada en ambos miembros y la derivada del segundo miembro lo multiplicamos por su derivada interna esto es:

$$\frac{dV}{dt}=3a^2*\frac{da}{dt}$$

5. Sustituimos los valores y realizamos las operaciones.

EJEMPLO:

Si la arista de un cubo crece a razón de 2 cm/seg, ¿A qué velocidad cambia el volumen del cubo en el instante en que la arista mide 5cm?



Solución:

El problema nos dice que la arista está creciendo a razón de 2 cm/seg. Entonces eso es lo que se conoce como una razón de cambio, tenemos entonces que:

$$\frac{da}{dt} = 2cm/seg$$

Entonces es una razón de cambio positiva porque dice que la arista está creciendo aumentando de tamaño al ritmo de 2 cm/seg, como nos pregunta a qué velocidad cambia el volumen del cubo, es decir cuál será la razón de cambio del volumen con respecto al tiempo en el instante en que la arista mide 5 cm.

$\frac{dV}{dt}$ =? Cuando a = 5 cm

Entonces hay que encontrar una expresión matemática que relacione el volumen del cubo con el valor de su arista, esa expresión es:

$V= a^3$

Ahora derivamos con respecto al tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{da^3}{dt}$$

Entonces la derivada de a^3 es $3a^2$ y lo multiplicamos por su derivada interna:

$$\frac{dV}{dt} = 3a^2 \frac{da}{dt}$$

Y como:

$$\frac{da}{dt} = 2cm/seg$$

Entonces tenemos:

$$\frac{dV}{dt} = 3(5cm)^2(2cm/seg)$$

Resolviendo:

$$\frac{dV}{dt} = 150cm^3/seg$$

Hay que observar que las unidades del resultado son consistentes con las variables, el volumen en cm^3 y el tiempo en seg.

CONCEPTOS DE CRECIMIENTO Y TASA DE CAMBIO, DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

La derivada de una función es un vector que apunta hacia la dirección donde la función ve un mayor incremento en su valor.

A la luz de la afirmación anterior se puede concluir que la derivada de la función es generalmente cero en algunos mínimos locales o máximos locales dado que en esa posición la función no nota incrementos hacia una dirección en particular.

En algunos lugares la palabra gradiente también se usa para denotar la derivada de la función.

Sin embargo, esta palabra es más apropiada para la derivada de la función de un vector o para una función con múltiples variables.

El símbolo griego delta, representado como un triángulo es utilizado para mostrar el cambio en el valor de una variable. y significaría un cambio en el valor de y.

La pendiente de una línea recta se puede calcular como

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

La expresión anterior se denomina como cociente de la diferencia. Esto se debe a que representa la diferencia entre dos cocientes.

La tasa o razón de cambio puede ser constante o no. Una tasa de cambio constante es aquella que no cambia durante un período de tiempo.

Supongamos que la tasa de cambio del número de migrantes de los años 1978 a 1988 es 2.16 mientras que es de 6.9 desde el año 1988 a 2008.

Así podemos notar que en el ejemplo anterior la tasa de cambio no es constante. En tal situación se puede calcular una tasa de cambio promedio en un intervalo.

Una fórmula general para representar una tasa de cambio promedio en un intervalo sería,

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Aquí y es una función en términos de t, representando la ecuación y = f (t). El intervalo es considerado entre t = a y t = b.

Si la tasa de cambio es constante durante todos los intervalos, entonces tal función es llamada función lineal.

Si la tasa de cambio de una función se calcula sobre un tipo de intervalo o en un punto específico, entonces la llamamos tasa de cambio instantánea.

La tasa de cambio de una función g en un punto x, llamada la razón o tasa instantánea de cambio en x es el límite de la tasa promedio de variación de g a lo largo de intervalos cada vez más pequeños alrededor de x.

Como sabemos la variación en la tasa es un cociente de la diferencia, la tasa instantánea de cambio será el límite de esos cocientes.

La tasa de cambio instantánea es popularmente conocida por el nombre de derivada.

No es posible calcular la derivada de una función en algún instante determinado, por tanto la derivada de una función se calcula sobre un intervalo, aunque este intervalo sea muy pequeño.

Entonces el cálculo de la derivada de una función también se puede hacer mediante el cálculo de la tasa promedio de cambio en intervalos más cortos.

REGLA DE LOS CUATRO PASOS

La derivada de una función también se puede obtener como el límite del cociente de incrementos, conocido como la regla de los cuatro pasos.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

El procedimiento en este caso consiste en los pasos siguientes:

1. Se da un incremento, Δx a la variable independiente x
2. Se obtiene el incremento correspondiente a la función $f(x+\Delta x) - f(x)$
3. Se obtiene el cociente de los incrementos $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
4. Se calcula el límite del cociente de incrementos $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

y esto proporciona la derivada de $f(x)$

En la aplicación de esta regla, además de las operaciones de factorización que ya recordamos, será necesario utilizar el desarrollo de binomios como:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \text{ ,etc}$$

Y también recordar cómo racionalizar el numerador o denominador de una fracción.

Ejemplos:

Ej. 1 Obtén la derivada de la función $f(x) = -5x + 10$

Solución

1. Damos un incremento Δx a x,
2. Obtenemos el incremento de la función
$f(x+\Delta x) - f(x) = -5(x+\Delta x) - (-5x) = -5x - 5\Delta x + 5x = -5\Delta x$
3. Obtenemos el cociente de incrementos $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{-5\Delta x}{\Delta x} = -5$ y
4. aplicamos el límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (-6) = -6$

Por lo tanto, $f'(x) = -6$

Ej. 2 Obtén la derivada de $f(x)=5x^2-13x+3$

Solución

1. Damos un incremento a x y obtenemos el incremento correspondiente a $f(x)$

2. $f(x+\Delta x)-f(x)=5(x+\Delta x)^2-13(x+\Delta x)+3-5x^2+13x-3$

Obtenemos el cociente de incrementos

1. $\dfrac{5(x+\Delta x)^2-13(x+\Delta x)+3-(5x^2-13x+3)}{\Delta x}$

Desarrollamos el binomio al cuadrado y eliminamos paréntesis

$$=\frac{5(x^2+2x\Delta x+\Delta^2 x)-13x-13\Delta x+3-5x^2+13x-3}{\Delta x}$$

Simplificamos el $13x$ y el -3

$$=\frac{5x^2+10x\Delta x+5\Delta^2 x-13\Delta x-5x^2}{\Delta x}=\frac{10x\Delta x+5\Delta^2 x-13\Delta x}{\Delta x}=10x+5\Delta x-13$$

2. Calculamos el límite de la expresión anterior, para obtener la derivada

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[10x+5\Delta x-13]}{\Delta x}=10x-13$$

Por lo tanto, $f'(x)=10x-13$

DERIVACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

Entiéndase la derivada como la pendiente de la recta tangente a la función en un punto dado, lo anterior implica que la función debe existir en ese punto para poder trazar una recta tangente en él.

FORMULAS PARA DERIVAR FUNCIONES ALGEBRAICAS

$$\frac{d}{dx}(c)=0,\ \text{c=constante}$$

$$\frac{d}{dx}(x)=1$$

$$\frac{d}{dx}(u+v+\ldots)=\frac{d}{dx}(u)+\frac{d}{dx}(v)+\ldots$$

$$\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{d}{dx}(u)$$

$$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{d}{dx}(v)+v\frac{d}{dx}(u)$$

$$\frac{d}{dx}(uvw)=uv\frac{d}{dx}(w)+uw\frac{d}{dx}(v)+vw\frac{d}{dx}(u)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{1}{c}\cdot\frac{d}{dx}(u),\ \text{c}\neq 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right)=c\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{c}{u^2}\cdot\frac{d}{dx}(u),\ \text{u}\neq 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{d}{dx}(u)-u\frac{d}{dx}(v)}{v^2},v\neq 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^m)=mx^{m-1}$$

$$\frac{d}{dx}(u^m)=mu^{m-1}\frac{d}{dx}(u)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},y=f(u),u=g(x),y=f\{g(x)\}$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN f(x)=xn, CUANDO n PERTENECE A LOS NÚMEROS NATURALES.

Hemos estudiado cómo calcular la derivada de una función **f(x)** en un punto **x=a**. Si ahora queremos calcular la derivada de **f(x)** en dos o más puntos, tendremos que repetir los cálculos para cada uno de ellos.

La forma de evitar la repetición de los cálculos es determinar la **función derivada** para un punto **x** genérico, y después sustituir los puntos deseados.

Para comprender el concepto de **función derivada** observa la escena siguiente:

Por tanto, se llama **función derivada de f(x)** a una función que asocia a cada abscisa **x** la derivada de **f** en dicho punto. Se representa por **f´(x)**, y se calcula:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para calcular el límite anterior se aplica la regla de los cuatro pasos, pero utilizando un punto genérico **x** (en lugar de un valor concreto **a**). En el siguiente ejemplo se calcula la función derivada de la de la escena anterior:

Cálculo de $f'(x)$, siendo $f(x) = -0.5x^2 + 2x + 2$:

- **Paso 1**:

$$f(x+h) = -0.5(x+h)^2 + 2(x+h) + 2 =$$
$$= -0.5x^2 - xh - 0.5h^2 + 2x + 2h + 2$$

- **Paso 2**:

$$f(x+h) - f(x) = (-0.5x^2 - xh - 0.5h^2 + 2x + 2h + 2) - (-0.5x^2 + 2x + 2) =$$
$$= -xh - 0.5h^2 + 2h$$

- **Paso 3**: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-xh - 0.5h^2 + 2h}{h} = -x - 0.5h + 2$

- **Paso 4**: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(-x - 0.5h + 2) = -x + 2$

Por tanto: $f'(x) = -x + 2$

(Nota: no se debe confundir los conceptos de **derivada de una función en un punto**, que es un número real, con **función derivada**, que es una función. Por comodidad en el lenguaje se suele utilizar la palabra **derivada** para nombrar ambos conceptos. Es el contexto el que nos indicará si **derivada** se refiere a una u otra acepción.)

EJERCICIOS.

3. Halla la función derivada de cada una de las siguientes funciones: **f(x)= -2x+5   g(x)=x²-2x-3   h(x)=1 / x   j(x)=raíz(x)**.

4. Halla la función derivada de una función constante cualquiera **f(x)=k** (**k** es un número real).

5. Halla la función derivada de **f(x)=x** y **f(x)=x²**.

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

En General las funciones se han presentado de la forma $y = f(x)$, expresando una variable en términos de la otra, pero se da el caso donde las 2 variables están implícitas.
En los cursos de cálculo la mayor parte de las funciones con que trabajamos están expresadas en forma explícita, como en la ecuación dónde la variable y está escrita explícitamente como función de x. Sin embargo, muchas funciones, por el contrario, están implícitas en una ecuación. La función y = 1 / x, viene definida implícitamente por la ecuación: x y = 1.

Estrategia para la Derivación Implícitas

1. Derivar ambos lados de la ecuación respecto de x

2. Agrupar todos los términos en que aparezca $\frac{dy}{dx}$ en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha.

3. Sacar factor común $\frac{dy}{dx}$ en la izquierda.

4. Despejar $\frac{dy}{dx}$, dividiendo la ecuación por su factor acompañante en la parte izquierda

Ejemplo # 1

si $x^2+y^2=25$, encontrar $\frac{dy}{dx}$.

Derivamos ambos lados de la ecuación.

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=0$$

Recordemos que y es una función de x por lo que al derivarla aplicaremos la regla de la cadena.

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

y resolvemos para $\frac{dy}{dx}$.

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}}$$

Ejemplo #2

Encontrar y' de:

$$y=(\cos(x))^x$$

Aplicamos logaritmo natural en ambos lados de la ecuación, para quitar el exponente x.

$$\ln(y)=\ln[(\cos(x))^x]$$

por leyes de los logaritmos.

$$\ln(y)=x\ln[(\cos(x))]$$

derivamos implícitamente.

$$\frac{1}{y}y' = [\ln(\cos(x))] + \frac{x}{\cos(x)}(-sen(x))$$

$$\frac{1}{y}y' = [\ln(\cos(x))] - (x)tan(x)]$$

Despejamos y'-

$$y' = [\ln(\cos(x))] - (x)tan(x)]*y$$

Sustituimos y.

$$\boxed{y' = [\ln(\cos(x))] - (x)tan(x)](\cos(x))^{x}}$$

Ejemplo #3

$$xy^2 + x^2y = 3$$

Derivamos implícitamente:

$$y^2 + x2yy' + 2xy + x^2y' = 0$$

Dejamos y prima de un solo lado

$$x2yy' + x^2y' = -2y_2 - 2xy$$

Aplicamos Factor común y prima

$$y'(x2y + x^2) = -y^2 - 2xy$$

dividimos $(x2y+x^2)$ de ambos lados

$$y' = -\frac{y^2 - 2xy}{x2y + x^2}$$

Ejemplo # 4

$\frac{d}{dx}\left[sen^{-1}(x)\right]$

$y = sen^{-1}(x)$

$sen(y) = x$
$y' \cos(y) = 1$

$y' = \frac{1}{\cos(y)}$

Cambiamos el cos(y) a función de el sen(y) que sería

$= \cos^2(y) + sen^2(y) = 1$

despejamos cos(y)

$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2(y)}}$

Respuesta:

$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Ejemplo # 5

$\frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}(x)\right]$

$y = \cos^{-1}(x)$

$\cos(y) = x$
$-y' sen(y) = 1$

$y' = -\frac{1}{sen(y)}$

Cambiamos el sen(y) a función de el cos(y) que sería

$= \cos^2(y) + sen^2(y) = 1$

despejamos sen(y)

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}}$$

Respuesta:

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ejemplo # 6

$$x^2y+xy^2=3x$$

$$x^2y'+2yx+2xyy'+y^2=3$$

$$x^2y'+2xyy'=3-y^2-2xy$$

$$y'(x^2+2xy)=3-y^2-2xy$$

$$y'=\frac{3-y^2-2xy}{x^2+2xy}$$

Ejemplo#7

$$x^2+y^2=1$$
$$2x+2yy'=0$$
$$y'=\frac{-2x}{2y}$$

Ejemplo#8

$$senx+cosy=senxcosy$$

$$cosx-senyy'=cosxcosy+cosyy'senx$$

$$-senyy'-cosyy'senx=cosxcosy-cosx$$

$$y'=\frac{-cosxcosy-cosx}{seny-cosysenx}$$

MAXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS

Con cierta frecuencia nos encontramos con la necesidad de buscar la mejor forma de hacer algo. En muchas ocasiones a través de los poderosos mecanismos de cálculo diferencial es posible encontrar respuesta a estos problemas, que de otro modo parecería imposible su solución.

Entre los valores q puede tener una función (Y) puede haber uno que sea el mas grande y otro que sea el mas pequeño. A estos valores se les llama respectivamente punto máximo y punto mínimo absolutos.

Si una función continua es ascendente en un intervalo y a partir de un punto cualquiera empieza a decrecer, a ese punto se le conoce como punto critico máximo relativo, aunque comúnmente se le llama solo máximo.

Por el contrario, si una funcion continua es decreciente en cierto intervalo hasta un punto en el cual empieza a ascender, a este punto lo llamamos puntro critico minimo relativo, o simplemente minimo.

- Una funcion puede tener uno, ninguno o varios puntos criticos.
- Curva sin máximos ni mínimos función sin máximos ni mínimos
- Función con un máximo curva con un máximo y un mínimo
- Curva con un mínimo curva con varios mínimos y máximos
- La pendiente de la recta tangente a una curva (derivada) en los puntos críticos máximos y mínimos relativos es cero, ya que se trata de una recta horizontal.
- En los puntos críticos máximos, las funciones tienen un valor mayor que en su entorno, mientras que en los mínimos, el valor de la función es menor que en su entorno.

En un punto critico maximo relativo, al pasar la funcion de creciente a decreciente, su derivada pasa de positiva a negativa.

En un punto critico minimo relativo, la funcion deja de decrecer y empieza a ser creciente, por tanto, su derivada pasa de negativa a positiva.

METODOS PARA CALCULAR MAXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCION

Dada la función $\mathbf{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4}$, estudia su crecimiento y decrecimiento.
¿Tiene f(x) máximos o mínimos?. Si los tiene halla sus coordenadas.

1. Derivada primera de la función

Hacemos la derivada primera de la función. La igualamos a 0 y resolvemos la ecuación.
Si la ecuación tiene solución, en esos puntos de x puede haber máximos o mínimos locales (también se llaman puntos singulares o puntos críticos).

$\mathbf{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4}$

Derivada primera $\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Igualamos la derivada primera a 0 y resolvemos la ecuación.

$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

En estos puntos puede haber máximo o mínimo.

2. Crecimiento y decrecimiento.

Trazamos una recta y marcamos los valores de x que me anulan la derivada.
La recta queda dividida en intervalos. Cogemos valores de x comprendidos en cada intervalo, los sustituimos en la derivada y vemos su signo.

$f'(x) > 0 \quad \rightarrow$ Función creciente en ese intervalo.

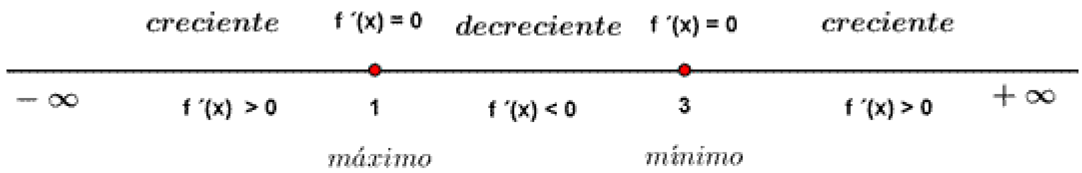
$f'(x) < 0 \quad \rightarrow$ Función decreciente en ese intervalo.

La función es creciente en aquellos intervalos donde el signo de la función derivada es positivo. Es decreciente en el intervalo donde la función derivada es negativa.

$\mathbf{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4}$

Trazamos una recta marcamos los valores 1 y 3.
La recta nos queda dividida en 3 intervalos.
Tomamos un valor de x para cada intervalo y lo sustituimos en la derivada para ver su signo.

Intervalo $(-\infty,1]$ cojo $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 9$ positiva función es creciente.
Intervalo $[1,3]$ cojo $x = 2 \Rightarrow f'(2) = -3$ negativa función decreciente.
Intervalo $[3,+\infty)$ cojo $x = 4 \Rightarrow f'(4) = 9$ positiva función decreciente.



3. Máximos y mínimos $\Rightarrow f\,'(x) = 0$

Deducimos si es máximo o mínimo estudiando el crecimiento y decrecimiento.

Máximo local $\rightarrow$ creciente − decreciente. En ese valor de x donde $f\,'(x) = 0$ hay un máximo.

Mínimo local $\rightarrow$ decreciente − creciente. En ese valor de x donde $f\,'(x) = 0$ hay un mínimo.

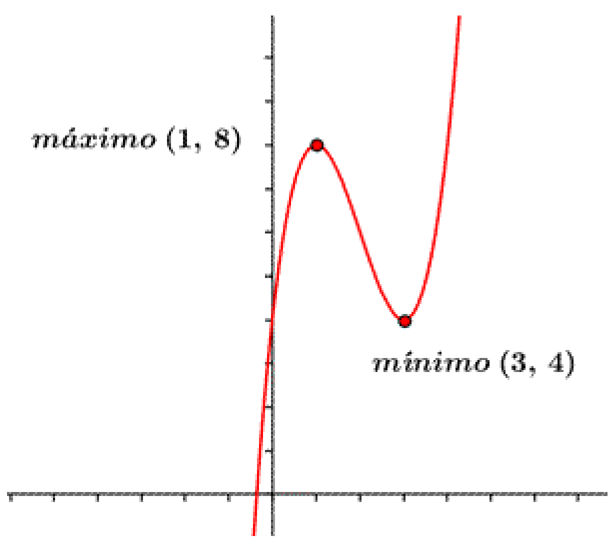
Los máximos y mínimos son puntos necesito las dos coordenadas (x,y).

Para calcular la coordenada "y" de los máximos y mínimos sustituimos el valor de x en la función.

Si sale creciente − creciente o decreciente − decreciente no hay máximos ni mínimos.

$x = 1$ $\Rightarrow$ creciente - decreciente $\Rightarrow$ máximo local $\Rightarrow$ $f(1) = 8$ $\Rightarrow$ Coordenadas (1,8)

$x = 3$ $\Rightarrow$ decreciente - creciente $\Rightarrow$ mínimo local $\Rightarrow$ $f(3) = 4$ $\Rightarrow$ Coordenadas (3,4)



Función racional

Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{(x+5)^2}$, halla sus puntos singulares.

- **Derivada**

$$\mathbf{f(x) = \frac{x}{(x+5)^2}} \Rightarrow f´(x) = \frac{1 \cdot (x+5)^2 - x \cdot 2(x+5)}{(x+5)^4}$$

$$f´(x) = \frac{-x+5}{(x+5)^3} \Rightarrow \frac{-x+5}{(x+5)^3} = 0 \Rightarrow -x+5 = 0 \Rightarrow$$ **En x = 5 puede haber máximo o mínimo.**

- **Crecimiento y decrecimiento**

La recta queda dividida en dos trozos. $\Rightarrow f´(4) > 0$ creciente $\Rightarrow f´(6) < 0$ decreciente

	x = 4		x = 6	
$-\infty$	$f´(4) > 0$ creciente	5	$f´(6) < 0$ decreciente	$+\infty$
		$\cap$ máximo		

- **Máximo local** en $x = 5 \Rightarrow f(5) = \dfrac{1}{20} \Rightarrow$ Coordenadas del máximo $\left(5, \dfrac{1}{20}\right)$

* * * Conviene hallar el dominio (al principio) para estar seguros que en los puntos donde pueda haber máximos o mínimos la función existe. Dom f = $\mathbb{R} - \{-5\}$. En este caso como el máximo nos ha salido en $x = 5$ no tenemos problema.